E-school di Arrigo Amadori

Analisi II

Problema di Cauchy

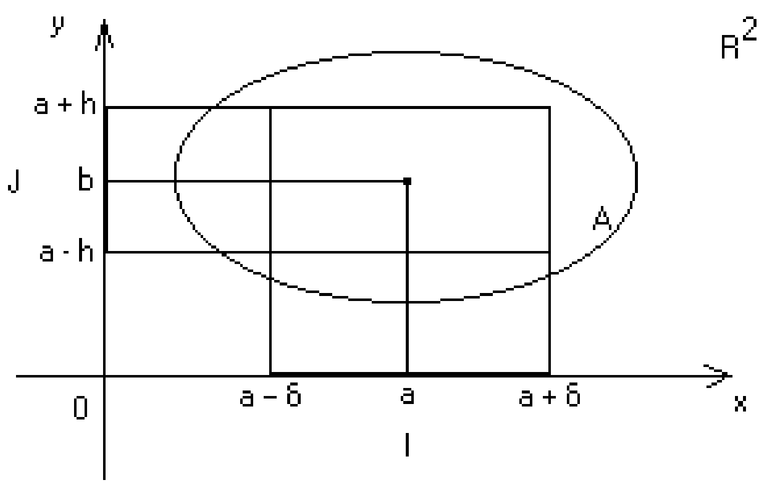
Il problema di Cauchy è alla base della teoria sulle equazioni differenziali le quali costituiscono uno dei capitoli centrali dell'analisi.

In generale, il problema di Cauchy consiste nel ricavare una o più funzioni le cui derivate sono date da una ulteriore funzione della variabile indipendente, delle funzioni stesse ed eventualmente delle loro derivate. Le funzioni trovate, detti integrali, devono poi soddisfare certe condizioni iniziali.

La trattazione esposta in questo capitolo è limitata al campo reale. L'estensione al campo complesso è immediata.

01 – Problema di Cauchy in R x R di ordine 1 .

Siano $I = [a - \delta , a + \delta]$ e $J = [b - h , b + h]$ dove δ e h sono due numeri reali positivi. Sia A un aperto di R^2 e sia $I \times J$ sottoinsieme proprio di A . Sia $f : A \to R$ una funzione continua su A . Graficamente :



Sia $M = \max_{I \times J} |f(x,y)|$ e sia $M\delta \le h$ ed esista un numero reale positivo L tale che :

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2|$$ **condizione di Lipschitz**

per ogni x appartenente ad I e per ogni y_1 e y_2 appartenenti a J .

Allora (omettiamo la dimostrazione) esiste una ed una sola funzione $\phi : I \to R$ tale che :

- 1 - ϕ è continua assieme alla sua derivata prima su I

- 2 - $\phi(a) = b$

- 3 - $\phi(x)$ appartiene a J per ogni x appartenente ad I

- 4 - $\phi'(x) = f(x , \phi(x))$ per ogni x appartenente ad I .

La funzione ϕ così definita si chiama **soluzione** o **integrale** o **curva integrale** dell'**equazione differenziale** $y' = f(x , y)$ soddisfacente la **condizione iniziale** $y(a) = b$.

Sinteticamente, possiamo affermare che il problema di Cauchy qui descritto corrisponde all'equazione differenziale :

$$y' = f(x, y)$$

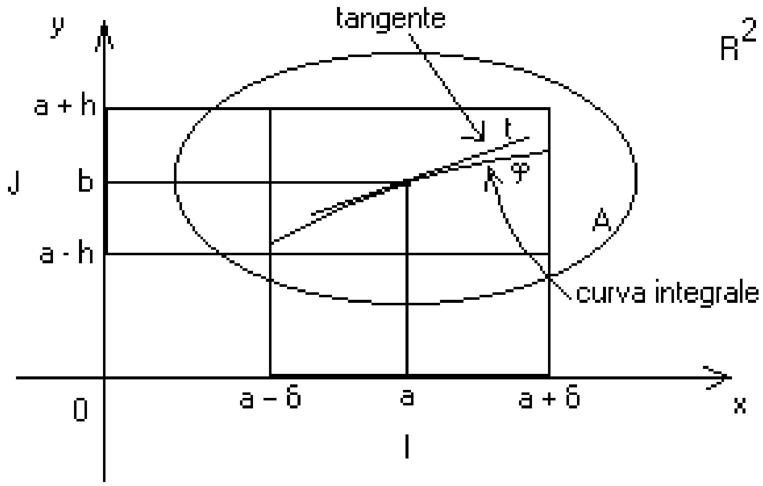
con le condizioni iniziali :

$$y(a) = b$$

il cui integrale è la funzione :

$$y = \varphi(x) .$$

Graficamente :



La curva ϕ ha la particolarità che in ogni suo punto la sua derivata è uguale al valore che ha la funzione f nel punto stesso. Questo è ciò che contraddistingue il problema di Cauchy.

Per esempio, nel punto iniziale (a,b) la retta tangente t alla curva ha equazione :

$$y = b + (x-a) f(a,b)$$.

Quanto affermato sopra si limita ad assicurare l'esistenza di una soluzione dell'equazione differenziale. Non viene indicato nessun metodo per trovare la medesima. Si rimanda per questo il lettore ad uno dei tanti testi completi in materia.

Riportiamo qui due semplici esempi che utilizzano il cosiddetto metodo dell'**integrazione per separazione delle variabili**.

Esempi :

- 1 - y' = xy con le condizioni iniziali (a , b) = (1 , 1) .

L'equazione può essere scritta come :

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

da cui, separando le variabili, si ha :

$$\frac{1}{y} dy = x dx$$.

A questo punto si può integrare ambo le parti. Si ottiene così :

$$\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + c$$ dove c è una costante

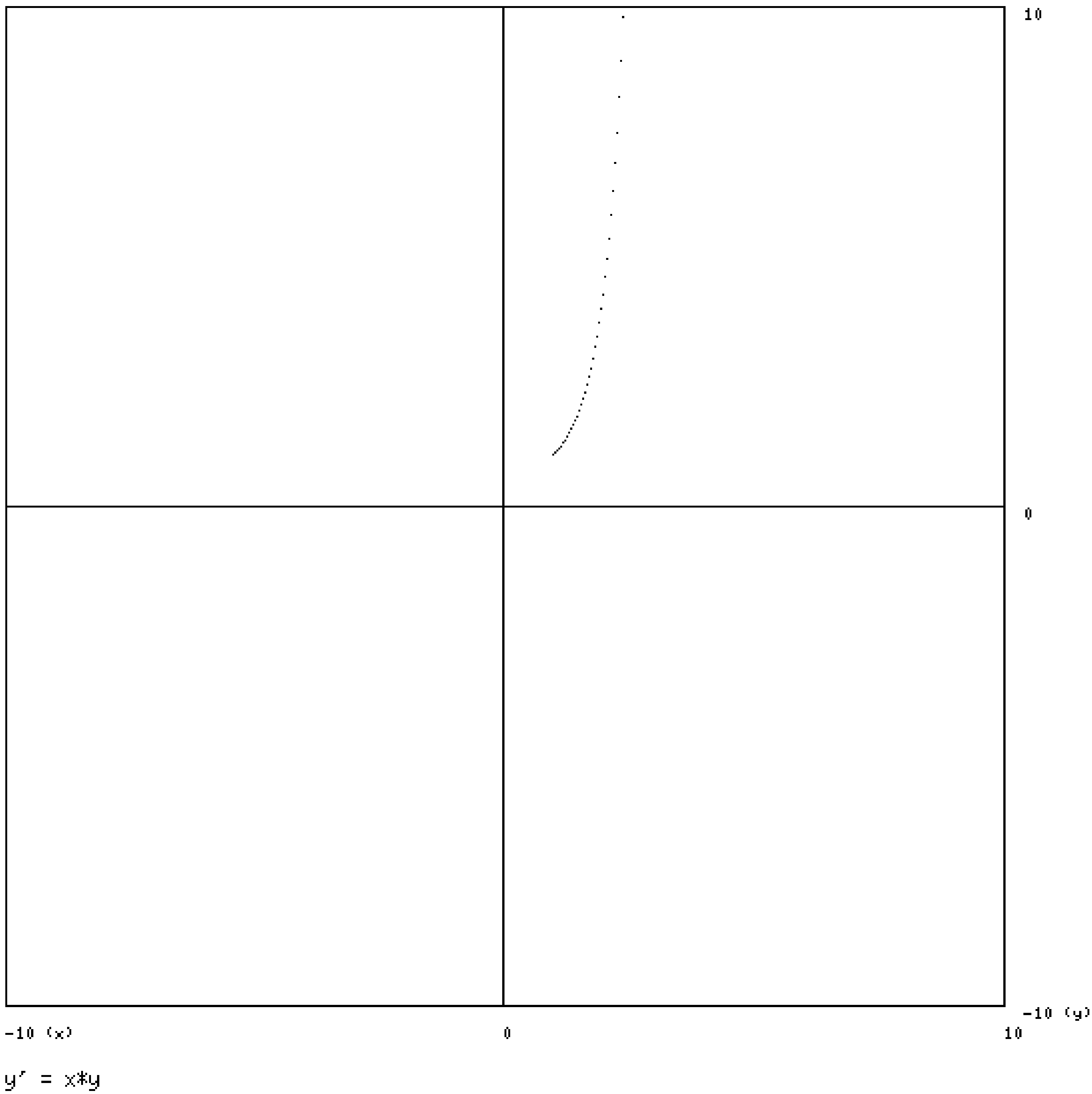
e quindi :

$$y = e^{\frac{1}{2}x^2 + c}$$

Sostituendo le condizioni iniziali si ricava $c = -\frac{1}{2}$ per cui si ottiene infine :

$$y = e^{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}}$$

che è la soluzione cercata. Graficamente (a destra di 1) :



- 2 - $y' = \dfrac{\sin x}{y}$ con le condizioni iniziali (a , b) = (0 , 1) .

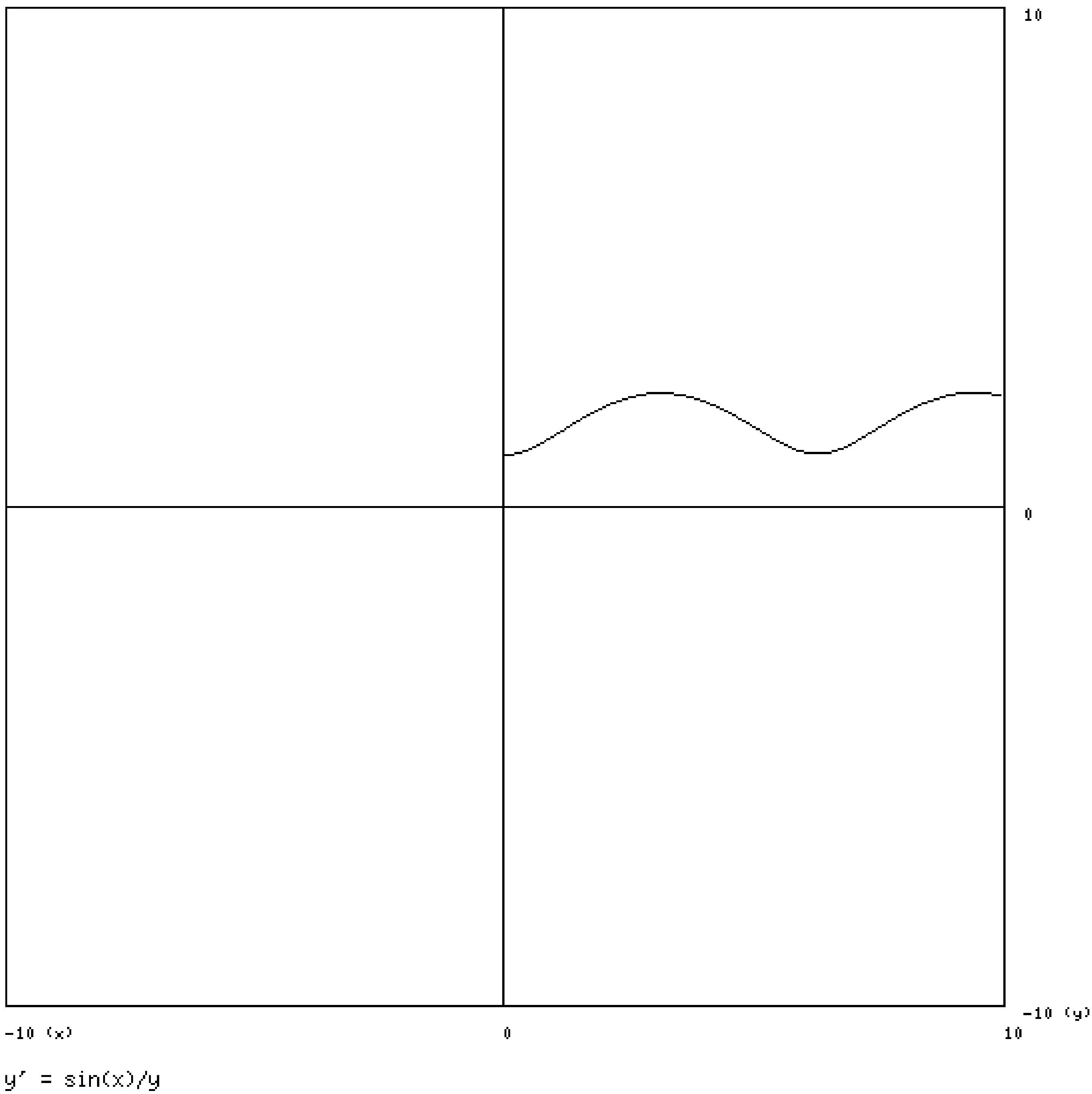
Integrando separando le variabili si ottiene facilmente :

$y = \sqrt{-2\cos x + 2c}$ dove c è una costante.

Sostituendo le condizioni iniziali si ricava $c = \dfrac{3}{2}$ da cui si ottiene infine :

$$y = \sqrt{-2\cos x + 3}$$

che è la soluzione cercata. Graficamente (a destra di 0):



$y' = \sin(x)/y$

02 – Problema di Cauchy in R x R• di ordine 1 .

Siano A un aperto di R x R• , (a , b) appartenente ad A , δ e h numeri reali positivi,
I = [a - δ , a + δ] , $\overline{S(b,h)}$ (la chiusura della sfera aperta di centro b e raggio h) e
$I \times \overline{S(b,h)} \subset A$. Sia f : A → R• , $f = (f_1, \dots, f_n)$, continua ed esista il numero L reale positivo tale che $\left| f_j(x,y_1) - f_j(x,y_2) \right| \le L \| y_1 - y_2 \|$ per ogni (x,y_1) e (x,y_2) appartenenti a $I \times \overline{S(b,h)}$ dove j = 1, 2, ..., n. Se poi $M = \max\limits_{I \times \overline{S(b,h)}} \| f(x,y) \|$, sia $M\delta\sqrt{n} \le h$.

Allora (omettiamo la dimostrazione) esiste una ed una sola funzione ϕ : I → R• tale che :

- 1 - ϕ è continua assieme alla sua derivata prima su I (si intende ogni componente di ϕ)

- 2 - ϕ(a) = b (cioè $\varphi_j(a) = b_j$, per j = 1 , 2, ..., n)

- 3 - ϕ(x) appartiene a S(b , h) per ogni x appartenente ad I

- 4 - ϕ'(x) = f(x , ϕ(x)) per ogni x appartenente ad I (cioè $\varphi_j'(x) = f_j(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$, con j = 1 , 2, ..., n)

Sinteticamente, possiamo affermare che il problema di Cauchy qui descritto corrisponde al sistema di equazioni differenziali :

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

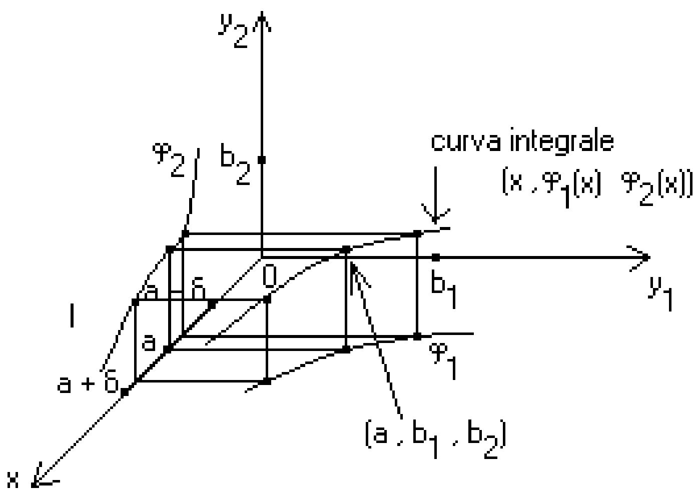
con le condizioni iniziali :

$$\begin{cases} y_1(a) = b_1 \\ y_2(a) = b_2 \\ \dots \\ y_n(a) = b_n \end{cases}$$

i cui integrali sono le funzioni :

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x) \\ y_2 = \varphi_2(x) \\ \dots \\ y_n = \varphi_n(x) \end{cases}.$$

Graficamente, nel caso R x R² :



03 – Problema di Cauchy in R x R• di ordine n .

Siano A un aperto di R x R• , (a , b) appartenente ad A , δ e h numeri reali positivi, I = [a - δ , a + δ] , $\overline{S(b,h)}$ (la chiusura della sfera aperta di centro b e raggio h) e $I \times \overline{S(b,h)} \subset A$. Sia f : A → R continua ed esista il numero L reale positivo tale che $\left| f(x,y_1) - f(x,y_2) \right| \le L \left\| y_1 - y_2 \right\|$ per ogni (x,y_1) e (x,y_2) appartenenti a $I \times \overline{S(b,h)}$.

Se poi $M = \max\limits_{I \times \overline{S(b,h)}} \left\| f(x,y) \right\|$, sia $\left(\|b\| + h \right) \delta \sqrt{n} \le h$ e $M \delta \sqrt{n} \le h$.

Allora (omettiamo la dimostrazione) esiste una ed una sola funzione ϕ : I → R tale che :

- 1 - ϕ è continua assieme alle sue derivate prime fino alla n-sima su I

- 2 - $\varphi(a) = b_1, \varphi'(a) = b_2, \dots, \varphi^{(n-1)}(a) = b_n$

- 3 - $\left(\varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)\right)$ appartiene a $\overline{S(b,h)}$ per ogni x appartenente ad I

- 4 - $f\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)\right) = \varphi^{(n)}(x)$ per ogni x appartenente ad I

Sinteticamente, possiamo affermare che il problema di Cauchy qui descritto corrisponde all'equazione differenziale :

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

con le condizioni iniziali :

$$\begin{cases} y(a) = b_1 \\ y'(a) = b_2 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(a) = b_n \end{cases}$$

il cui integrale è la funzione :

$$y = \varphi(x) .$$

Sussistono i seguenti teoremi (omettiamo le dimostrazioni) :

- 1 - Poste le condizioni di cui al paragrafo - 01 - , eccetto la condizione di Lipschitz, esistono allora due funzioni $\varphi : I \to R$ e $\psi : I \to R$ soddisfacenti i punti 1 - 4 del suddetto paragrafo tali che $\varphi(x) \leq \psi(x)$ per ogni x appartenente ad I . Se poi $\omega : I \to R$ soddisfa le medesime proposizioni allora $\varphi(x) \leq \omega(x) \leq \psi(x)$ per ogni x appartenente ad I .

  Si dice allora che ϕ e ψ sono rispettivamente l'**integrale inferiore** e l'**integrale superiore** dell'equazione differenziale y' = f(x , y) relativamente al punto (a , b) .

  Questo teorema è molto importante perché generalizza il problema di Cauchy in assenza delle condizione di Lipschitz.

Esempio :

- Sia l'equazione differenziale $y' = 3y^{2/3}$ con condizioni iniziali (a , b) = (0 , 0) .

La funzione $f(x,y) = 3y^{2/3}$ non è lipschitziana. Infatti non esiste nessun L > 0 tale che $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2|$ sia soddisfatta per ogni (x,y_1) e (x,y_2) appartenenti ad un opportuno rettangolo I x J . Per provare questo basta porre $y_1 = 0$ e $y_2 = y$, con y > 0 , ed osservare che $|0 - 3y^{2/3}| \le L|0 - y|$ ovvero $3y^{2/3} \le Ly$ ovvero $y^{-1/3} \le \frac{L}{3}$ non è mai soddisfatta per un fissato L > 0 perché $y^{-1/3}$ diverge per $y \to 0$.

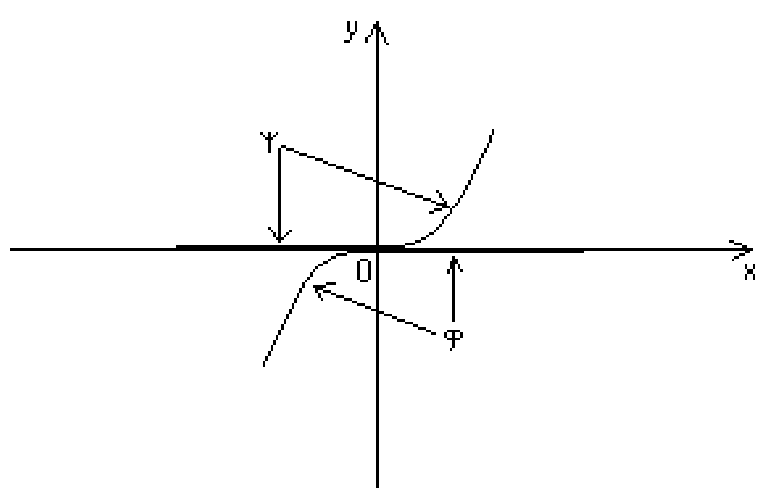
L'equazione differenziale non ha allora una soluzione univoca, ma un integrale inferiore ed uno superiore che sono rispettivamente :

$$\varphi(x) \begin{cases} x^3; x \le 0 \\ 0; x > 0 \end{cases}$$

e :

$$\psi(x) \begin{cases} 0; x \le 0 \\ x^3; x > 0 \end{cases} .$$

Graficamente :



Ogni altra soluzione è compresa fra queste due curve.

\- 2 - Poste le condizioni di cui al paragrafo - 02 - , eccetto la condizione di Lipschitz, esiste una funzione $\varphi : I \rightarrow R^n$ che soddisfa i punti 1 - 4 del suddetto paragrafo.

\- 3 - (**della dipendenza continua dell'integrale dai valori iniziali**) Sia A un aperto di R^2 e sia f : A → R continua su A . Sia (a , b) appartenente ad A e siano I e J due intervalli compatti di R . Sia J' un intervallo di R e sia $a \in I, b \in J' \subset J, I \times J \subset A$.
Supponiamo che esista una ed una sola $\varphi : I \times J' \rightarrow R$ tale che ϕ sia continua assieme alla sua derivata prima su I per ogni β appartenente a J' , $\phi(x , \beta)$ appartenga a J per ogni (x , β) appartenente a I x J' , $\phi(x , \beta) = \beta$ e

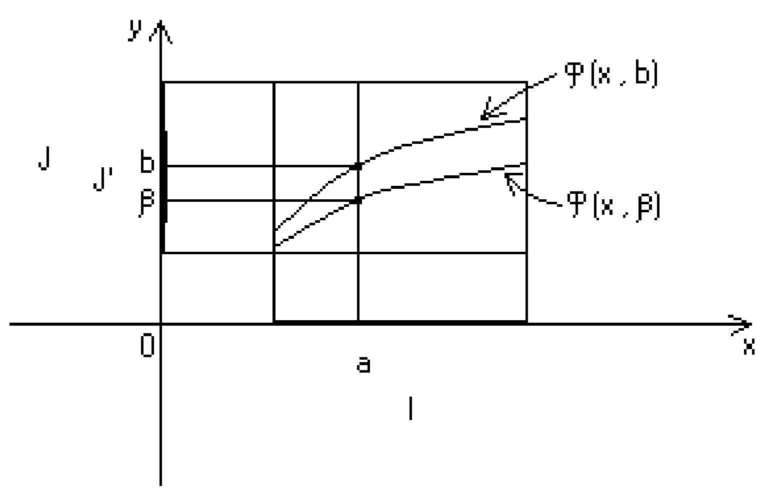
$$\frac{\partial \varphi(x, \beta)}{\partial x} = f\left(x, \varphi(x, \beta)\right)$$

per ogni (x , β) appartenente a I x J' . Allora :

$$\lim_{\beta \to b} \varphi(x, \beta) = \varphi(x, b)$$

per ogni x appartenete a I .

Graficamente :



Il teorema è valido anche per il sistema di equazioni differenziali $y_j' = f_j\left(x, y_1, \ldots, y_n\right)$ con j = 1, 2, ..., n .

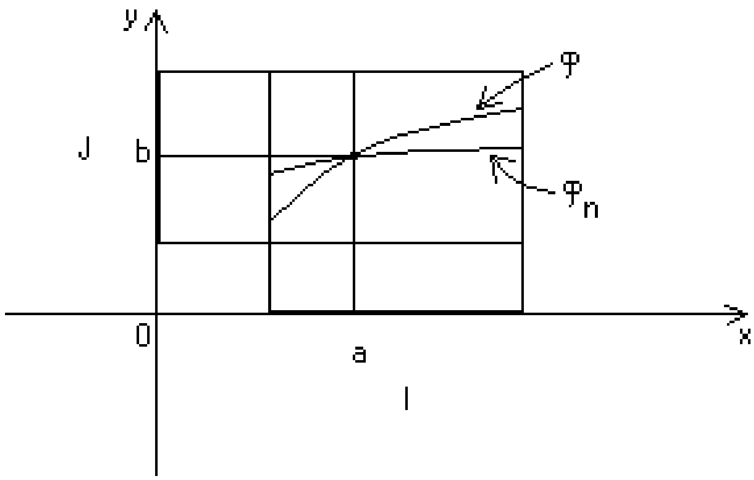
\- 4 - (**della dipendenza continua dell'integrale dall'equazione**) Sia A un aperto di R^2 e sia $f : A \to R$ continua su A . Siano $f_n : A \to R$ funzioni continue su A per ogni n naturale. Siano I e J due intervalli compatti di R tali che (a , b) appartenga ad $I \times J \subset A$. Esista una ed una sola funzione $\phi : I \to R$ continua assieme alla sua derivata prima su I tale che $\phi(a) = b$, $\phi(x)$ appartiene a J e $\phi'(x) = f(x , \phi(x))$ per ogni x appartenente ad I e, per ogni n , siano $\varphi_n : I \to R$ continue assieme alle loro derivate prime su I tali che $\varphi_n(a) = b$, $\varphi_n(x) \in J$ e

$$\varphi_n'(x) = f_n(x, \varphi_n(x))$$

per ogni x appartenente ad I . Allora se $f_n \to f$ uniformemente su $I \times J$, si ha :

$\varphi_n \to \varphi$ uniformemente su I .

Graficamente :



Il teorema è valido anche per il sistema di equazioni differenziali $y_j' = f_j(x, y_1, \ldots, y_n)$ con $j = 1, 2, \ldots, n$.

Fine.

[Pagina precedente]

[Home page]